Propuesta de trabajo fin de grado

Titulo: ***Investigación matemática y numérica de la ecuación de Lane-Emden y posibles generalizaciones***

Tutor: Uwe Brauer `oub@mat.ucm.es`

Plazas: 1

Grado: Matemáticas, Ingeniería Matemática

Contexto: La ecuación de Lane-Emden

La ecuación de Lane-Emden describe una solución estática, con simetría esférica, del sistema Euler-Poisson suponiendo una ecuación de estado tipo politrópico de forma $p = K\rho^\gamma$ (ver [Cha57] para detalles). La ecuación de Lane-Emden, en variables apropiadas, toma la forma

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n & = 0 \\ \theta(0) & = 1 \\ \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Es bien conocido que dicha ecuación permite soluciones explícitas solo para ciertos valores de n.

Posible generalización: el sistema de Euler con una constante cosmológica

Las observaciones cosmológicas sugieren que se necesita una constante cosmológica para explicar el comportamiento a gran escala del Universo. Para el sistema Euler-Poisson, hay dos posibles generalizaciones propuestas. La primera es

$$\partial_t\rho + v^a\partial_a\rho + \rho\partial_a v^a = 0 \tag{2}$$

$$\rho\left(\partial_t v^a + v^b\partial_b v^a\right) + \partial^a p = -\rho\partial^a\phi \tag{3}$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho + \Lambda \tag{4}$$

La correspondiente ecuación de Lane-Emden con constante cosmológica ha sido estudiada en [BMN07] y en [MBT12]. La segunda posibilidad consiste en mantener Ecuación (2) y Ecuación (3), y sustituir Ecuación (4) por

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho + \Lambda\phi, \tag{5}$$

es decir, la constante multiplica ahora al propio potencial. En este caso, el potencial de una masa puntual decae exponencialmente (potencial de tipo Yukawa).

En ambos casos, la constante Λ resulta en una modificación de Ecuación (1). En cuanto a la ecuación de Lane-Emden, sería interesante ver cómo las diferentes modificaciones afectarían el comportamiento de las correspondientes soluciones estáticas, primero analíticamente si esto es posible, pero principalmente numéricamente.

Analizar métodos numéricos y adaptar a Lane-Emden (modificado)

Existen varios métodos numéricos para resolver la ecuación de Lane-Emden (ver, por ejemplo, [Hor86]). Entre ellos hay dos trabajos basados en métodos pseudoespectrales: el de Motsa y Shateyi [MS12], que usa un método de linealización sucesiva, y el de Boyd [Boy11], que combina un método espectral de Chebyshev con una iteración de tipo Newton-Kantorovich.

El objetivo del trabajo es analizar ambos métodos y aplicarlos, en primer lugar, a la ecuación de Lane-Emden original (Ecuación (1)). Después, hay que adaptarlos a la ecuación modificada que resulta de la primera generalización (Ecuación (4)) y, si el tiempo lo permite, también a la que resulta de la segunda (Ecuación (5)).

Recomendaciones

1. Física
2. Hidrodinámica: conocimientos básicos de teoría de fluidos.
3. Análisis numérico de EDOs.

Referencias

[BMN07] A. Balaguera-Antolínez, D. F. Mota y M. Nowakowski. "Astrophysical configurations with background cosmology: probing dark energy at astrophysical scales". En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 382 (2007), pág. 621. arXiv: 0708.2980 (vid. pág. 1).

[Boy11] J. P. Boyd. "Chebyshev spectral methods and the Lane-Emden problem". En: *Numer. Math. Theory Methods Appl.* 4.2 (2011), págs. 142-157 (vid. pág. 2).

[Cha57] S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Astrophysical monographs. Dover Publications, 1957. URL: https://books.google.de/books?id=VwPLAgAAQBAJ (vid. pág. 1).

[Hor86] G. P. Horedt. "Seven-digit tables of Lane-Emden functions". En: *Astrophysics and Space Science* 126 (1986), págs. 357-408 (vid. pág. 2).

[MBT12] M. Merafina, G. S. Bisnovatyi-Kogan y S. O. Tarasov. "A brief analysis of self-gravitating polytropic models with a non-zero cosmological constant". En: *Astron. Astrophys.* 541 (2012), A84. arXiv: 1102.0972 (vid. pág. 1).

[MS12] S. S. Motsa y S. Shateyi. "A successive linearization method approach to solve Lane-Emden type of equations". En: *Math. Probl. Eng.* (2012), Art. ID 280702, 14. DOI: 10.1155/2012/280702. URL: https://doi.org/10.1155/2012/280702 (vid. pág. 2).